極値不連結空間の包括的解説

本ドキュメントは、任意の圏における射影的対象の定義から出発し、極値不連結コンパクトHausdorff空間の特徴付け、Gleasonの被覆定理とその詳細な証明、保存形式、保存された位相的性質、そして現代の凝縮数学（Condensed Mathematics）における応用例にいたるまでのすべての解説内容を網羅したものです。

1. 任意の圏における射影的対象の定義と例

定義

圏 $\mathcal{C}$ における対象 P が**射影的対象 (projective object)** であるとは、任意の全射（通常はエピ射、あるいは文脈により指定された全射のクラス） $f : A \to B$ （または $e : E \to X$ ）と、任意の射 $g : P \to B$ （または $f : P \to X$）に対して、ある射 $h : P \to A$ （または $\tilde{f} : P \to E$）が存在して次の図式を可換にすること（すなわち $f \circ h = g$ または $e \circ \tilde{f} = f$ を満たつこと）を言います。

これは、以下の図式が可換になるような射が常に存在するという意味です。

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow^{\exists h} & \downarrow^{g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \qquad \text{または} \qquad \begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow^{\exists \tilde{f}} & \downarrow^{f} \\ E & \xrightarrow[e]{} & X \end{array}$$

> **注意:** 位相空間の圏などを扱う場合、通常「全射」は「全射である連続写像」のクラスを

> 指します。

> ### 例（3つ）

1. **集合の圏 $\mathbf{Set}$ (Set):**
   任意の集合 P は射影的対象です。任意の全射関数 $e : E \to X$ に対して右逆写像が存在することになり、この事実（すべての全射写像が切断を持つこと）は、集合論における**選択公理 (Axiom of Choice)** そのものと同値です。
2. **環 R 上の左加群の圏 $R\text{-}\mathbf{Mod}$:**
   この圏における射影的対象は**射影加群 (projective module)** と呼ばれます。特に、任意の**自由加群 (free module)**（例えば R 自身の直和 $R^{\oplus I}$ や、$\mathbb{Z}$-加群における自由アーベル群など）は射影的対象の典型例です。より一般に、自由加群の直和因子となる加群がこれに該当します。
3. **位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ (Top):**
   全射として「全射な連続写像」をとった場合、任意の**離散位相空間**は射影的対象となります。離散空間からの写像の連続性は無条件で保証されるため、集合の圏の性質がそのまま引き継がれます。

2. 極値不連結コンパクトHausdorff空間の定義と特徴付け

> ### 定義

位相空間 X が**極値不連結 (extremally disconnected)** であるとは、 X の任意の開集合 $U \subset X$ の閉包 $\overline{U}$ がまた開集合（すなわち開かつ閉集合：clopen set）になることを言います。

> ### 特徴付けの条件

コンパクトHausdorff空間 X において、以下の条件はすべて互いに同値です。

1. X は極値不連結である。
2. X 内の任意の互いに素な開集合 U, V （すなわち $U \cap V = \emptyset$）に対して、それらの閉包も互いに素である： $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$。
3. 任意の開集合 $U \subset X$ と連続写像 $f : U \to [0,1]$ に対し、 X 全体への連続な延長 $\tilde{f} : X \to [0,1]$ が存在する。
（あるいは同値な表現として：任意の開集合 $U \subset X$ 上の有界連続関数 $f : U \to \mathbb{R}$ は、 X 全体上の連続関数 $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ に拡張できる。）

同値性の証明

$(1) \implies (2)$ の証明:

$U, V \subset X$ を $U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合とします。
$U \cap V = \emptyset$ より、 $U \subset X \setminus V$ です。 $X \setminus V$ は閉集合なので、閉包の定義から $\overline{U} \subset X \setminus V$ となり、したがって $\overline{U} \cap V = \emptyset$ です。
これから $V \subset X \setminus \overline{U}$ が従います。
条件(1)より $\overline{U}$ は開集合なので、その補集合 $X \setminus \overline{U}$ は閉集合です。
したがって、再び閉包をとることで $\overline{V} \subset X \setminus \overline{U}$ となり、 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ が示されました。

$(2) \implies (1)$ の証明:

$U \subset X$ を任意の開集合とします。 $V = X \setminus \overline{U}$ とおくと、 V は開集合であり、明らかに $U \cap V = \emptyset$ です。
条件(2)より、 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ が成り立ちます。
一方で、 $U \cup V = U \cup (X \setminus \overline{U})$ は X において稠密です（実際、この集合の閉包は $\overline{U} \cup \overline{X \setminus \overline{U}}$ ですが、任意の点 $x \in X$ について $x \in \overline{U}$ でなければ x は開集合 $X \setminus \overline{U}$ に含まれるため、必ずこの閉包に入ります）。
したがって、 $\overline{U} \cup \overline{V} = X$ です。
$\overline{U}$ と $\overline{V}$ は互いに素で、和集合が X になる閉集合同士なので、 $\overline{U}$ の補集合は閉集合

$\overline{V}$ です。すなわち $\overline{U}$ は開集合でもあり、条件(1)が示されました。

$(1) \iff (3)$ の証明の概略:

条件(1)より、任意の開集合の閉包は開かつ閉（clopen）です。$U \subset X$ を開集合、$f : U \to [0, 1]$ を連続写像とします。$\overline{U}$ は開かつ閉部分空間なので、 X 全体への延長を考えるには、まず稠密な開部分集合 $U \subset \overline{U}$ から $\overline{U}$ への延長を構成すれば十分です。したがって、 U が X で稠密であると仮定して構いません。各 $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ に対し、開集合 $U_r = \{x \in U \mid f(x) < r\}$ を考えます。条件(1)より $W_r = \overline{U_r}$ は開かつ閉集合です。ここで、 X 上の関数 $\tilde{f} : X \to [0, 1]$ を以下のように定義します：

$$\tilde{f}(x) = \inf\{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \mid x \in W_r\}$$

この $\tilde{f}$ がウェルディファインドであり、 U 上で f と一致し、かつ連続であることを標準的な議論（Tietzeの延長定理の証明の変形）によって示すことができます。逆もまた、[0,1]への関数を特性関数のように用いることで示されます。

3. コンパクトHausdorff空間の圏における射影的対象と極値不連結空間の同値性（Gleasonの定理）

コンパクトHausdorff空間と連続写像の圏を CHaus ($\mathbf{CHaus}$) とします。この圏における射影および全射は、通常の全射連続写像です。

> **定理 (Gleason, 1958)**
> CHaus における対象 P が射影的であることの必要十分条件は、 P が極値不連結なコンパクトHausdorff空間であることである。

証明の解説

1. 極値不連結 $\implies$ 射影的

P を極値不連結なコンパクトHausdorff空間とします。全射連続写像 $f: A \to B$ と連続写像 $g: P \to B$ が与えられたとき、持ち上げ $h: P \to A$ の存在を示します。

まず、ツォルンの補題（Zornの補題）を用いることで、 A の閉部分空間 A' であって、 B への制限写像 $f(A') = B$ が全射であり、かつその任意の真の閉部分集合 $F \subsetneq A'$ に対して全射性を満たさなくなるような「極小」なものが存在します。このような全射を**既約全射 (irreducible surjection)** と呼びます。したがって、最初から $f: A \to B$ は既約全射であると仮定して構いません。

ここで、ファイバー積（引き戻し） $P \times_B A = \{(x, y) \in P \times A \mid g(x) = f(y)\}$ を考え、第一射影を $\pi_1: P \times_B A \to P$ とします。 π_1 もまた全射連続写像です。同様に、 $P \times_B A$ の閉部分空間 M で、 $\pi_1|_M: M \to P$ が既約全射となるものを取ります。

ここで**「極値不連結空間への既約全射は同相写像である」**という重要な事実があります。 M の任意の開集合 V に対し、既約性から $\pi_1(M \setminus V)$ は P の真の閉集合であり、その補集合 $U = P \setminus \pi_1(M \setminus V)$ は空でない開集合で、 $\pi_1(V) \subset \overline{U}$ となります。 P は極値不連結なので $\overline{U}$ は開かつ閉です。これを利用して、 $\pi_1|_M$ が単射（したがって同相写像）であることを導けます。

したがって、 $\pi_1|_M: M \to P$ は同相写像です。その逆写像を $s: P \to M \subset P \times_B A$ とし、第二射影を $\pi_2: P \times_B A \to A$ とすると、 $h = \pi_2 \circ s: P \to A$ が求める連続な持ち上げになります（ $f \circ h = f \circ \pi_2 \circ s = g \circ \pi_1 \circ s = g$ ）。

2. 射影的 $\implies$ 極値不連結

P を CHaus の射影的対象とします。
任意のコンパクトHausdorff空間 P に対して、その**Gleason被覆**と呼ばれる、ある極値不連結コンパクトHausdorff空間 $\widetilde{P}$ からの既約全射 $\pi: \widetilde{P} \to P$ が存在することが一般論として知られています。

P は射影的対象なので、恒等写像 $\mathrm{id}_P: P \to P$ に対して、 π を経由する連続な持ち上げ $s: P \to \widetilde{P}$ が存在します（ $\pi \circ s = \mathrm{id}_P$ ）。

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] \\ \widetilde{P} \arrow[r, "\pi"'] & P \end{tikzcd}$$

このとき、 s は閉埋め込みであり、 P は極値不連結空間 $\widetilde{P}$ の**レトラクト (retract)**（引き込み）になっています。「極値不連結空間のレトラクトはまた極値不連結である」という位相的性質により、 P 自身も極値不連結であることが結論づけられます。

4. Gleasonの被覆定理とその証明の詳細

Gleasonの被覆定理（Gleason's Cover Theorem）は、直感的に言えば、**「どんなコンパクトHausdorff空間も、その本質的な位相構造を壊さないように上から覆いかぶさる『射影的（極値不連結）な空間』をただ1つ持つ」**ということを主張しています。

準備：必要な概念の定義

- **既約全射 (Irreducible Surjection):**
  連続な全射 $f: E \to X$ であって、 E の任意の真の閉部分集合 $F \subsetneq E$ に対して、 $f(F) \neq X$ となるもののこと。
- **正則開集合 (Regular Open Set):**
  位相空間 X の開集合 U であって、その閉包の内部が自分自身に一致するもの（ $U = \mathrm{Int}(\overline{U})$ ）。

Gleasonの被覆定理の主張

> 任意のコンパクトHausdorff空間 X に対して、以下の条件を満たす極値不連結コンパクトHausdorff空間 E と連続写像 $\pi : E \to X$ の組 (E, π) が存在する。
> 1. $\pi : E \to X$ は**既約全射**である。
> 2. このような被覆 (E, π) は、同相を除いて**一意**に定まる。

> この (E,π) を X の **Gleason被覆 (Gleason Cover)** と呼ぶ。

Gleasonの被覆定理の証明（正則開集合のブール代数を用いたアプローチ）

Step 1: 被覆空間 E の構成（ブール代数の利用）

X の正則開集合の全体を $RO(X)$ とします。 $RO(X)$ は、以下の演算により**完備ブール代数**になります。

- 順序：包含関係 $U \subset V$
- 結び（上限）： $U \vee V = \text{Int}(\overline{U \cup V})$
- 交わり（下限）： $U \wedge V = U \cap V$
- 補元： $\neg U = \text{Int}(X \setminus U)$

任意の完備ブール代数のStone空間（その上の超フィルター全体のなす空間）は、極値不連結コンパクトHausdorff空間になることが知られています。そこで、**E を $RO(X)$ のStone空間 $S(RO(X))$ として定義します**。これにより、 E は極値不連結コンパクトHausdorff空間となります。 E の点は、 $RO(X)$ 上の超フィルター（極大フィルター） α です。

Step 2: 射影写像 $\pi : E \to X$ の定義

各超フィルター $\alpha \in E$ に対して、 X の部分集合族 $\{\overline{U} \mid U \in \alpha\}$ を考えます。 α はフィルターなので、この族は有限交差性を持ちます。 X はコンパクトなので、この共通部分は空ではありません：

$$\bigcap_{U \in \alpha} \overline{U} \neq \emptyset$$

さらに、 X がHausdorff空間であり、 α が「極大」フィルターであることから、この共通部分は**ただ1点のみ**からなることが証明できます。そこで、この唯一の点を $\pi(\alpha)$ と定義し、写像 $\pi : E \to X$ を得ます。

Step 3: π が「連続な既約全射」であることの証明

1. **連続性:**

X の任意の開集合 W と、 $\pi(\alpha) \in W$ となる α をとります。 X はコンパクトHausdorff（したがって正則空間）なので、 $\pi(\alpha) \in V \subset \overline{V} \subset W$ となる正則開集合 V が存在します。 α の極大性から $V \in \alpha$ となります。Stone空間の位相の定義により、「 V を含む超フィルターの全体」は E の開かつ閉集合 $\hat{V}$ であり、 $\alpha \in \hat{V}$ です。 $\hat{V}$ の任意の元 β について、 $\pi(\beta) \in \overline{V} \subset W$ となるため、 π は連続です。

2. **全射性:**
   任意の $x \in X$ に対し、 x を含む正則開集合の全体は $RO(X)$ のフィルター基になります。これを極大フィルター（超フィルター） α に拡張すれば、構成から $\pi(\alpha) = x$ となり、全射が示されます。

3. **既約性 (Irreducibility):**
   $F \subsetneq E$ を真の閉集合とします。 E の基底の性質から、 F と交わらない空でない開かつ閉集合 $\hat{U}$ （$U \in RO(X), U \neq \emptyset$）が存在します。もし $\pi(F) = X$ であれば、ある $\alpha \in F$ に対して $\pi(\alpha) \in U$ となります。しかし、 $\pi(\alpha) \in U$ ならば、適当な正則開集合 $V \subset U$ を用いて $\alpha \in \hat{V} \subset \hat{U}$ とならざるを得ず、これは $\alpha \in F$ と $F \cap \hat{U} = \emptyset$ に矛盾します。したがって、 $\pi(F) \neq X$ であり、 π は既約全射です。

Step 4: 一意性の証明（圏論的アーギュメント）

被覆が本質的に1つしかないことを示します。 (E_1, π_1) と (E_2, π_2) を、ともに X のGleason被覆とします。

E_1 は極値不連結なので、 $\mathbf{CHaus}$ における**射影的対象**です。したがって、全射 $\pi_2 : E_2 \to X$ と写像 $\pi_1 : E_1 \to X$ に対して、持ち上げ $f : E_1 \to E_2$ が存在し、 $\pi_2 \circ f = \pi_1$ を満たします。

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\ E_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & X \end{tikzcd}$$

- **f は全射である:**
  $f(E_1)$ は E_2 のコンパクト（したがって閉）部分集合です。

$\pi_2(f(E_1)) = \pi_1(E_1) = X$ であり、 π_2 は既約全射であるため、 E_2 の真の閉集合の像は X になれません。よって $f(E_1) = E_2$ 、すなわち f は全射です。

- **f は単射である:**
  全く同様に、 E_2 も射影的対象なので、逆向きの持ち上げ $g : E_2 \to E_1$ が存在し、 $\pi_1 \circ g = \pi_2$ を満たし、 g も全射になります。このとき、合成 $g \circ f : E_1 \to E_1$ は $\pi_1 \circ (g \circ f) = \pi_1$ を満たす全射です。 π_1 の既約性から、このような自己写像は恒等写像 id_{E_1} にならざるをえないことが証明できます。同様に $f \circ g = \mathrm{id}_{E_2}$ です。

したがって、 f は同相写像となり、Gleason被覆の一意性が示されました。

5. 極値不連結コンパクトHausdorff空間の応用上重要な例（特に凝縮数学において）

提唱された**凝縮数学 (Condensed Mathematics)** においては、極値不連結空間の圏 $\mathrm{ExtrDis}$ ($\mathbf{ExtrDisc}$) は、凝縮集合（Condensed sets）を定義するためのサイトの基盤そのものとして決定的な役割を果たします。理論上特に重要となる5つの空間は以下の通りです。

1. **離散集合のストーン・チェック・コンパクト化 βI （または βS）:**
   任意の離散集合 I （特に自然数の集合 $\beta\mathbb{N}$）に対するストーン・チェック・コンパクト化は、もっとも代表的な極値不連結空間です。これは集合上の**超フィルター (ultrafilter)** 全体がなす空間と同一視されます。
   凝縮数学での重要性: 離散集合 S に対応する「自由凝縮集合」の構造を解析する際、 βS は $\mathrm{ExtrDis}$ における基本的なビルディングブロックとして頻繁に登場し、任意の位相空間を解像するための基礎となります。

2. **プロ有限空間（Profinite spaces）のGleason被覆:**
   カントール集合 $2^{\mathbb{N}}$ などの典型的なプロ有限集合は極値不連結ではありませんが、それらは必ずある極値不連結空間からの全射像（Gleason被覆） $\widetilde{2^{\mathbb{N}}}$ を持ちます。
   凝縮数学での重要性: 凝縮数学の基本定理の一つに「プロ有限集合上の層のコホモロジーは、極値不連結空間の構成に帰着される」というものがあり、既知のプロ有限集合を

射影分解するスタート地点としてこの被覆空間が不可欠です。

3. **p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ のGleason被覆 $\widetilde{\mathbb{Z}_p}$:**
   数論幾何における最重要オブジェクトである p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ はプロ有限環ですが、空間としては極値不連結ではありません。そのGleason被覆 $\widetilde{\mathbb{Z}_p}$ は、$\mathbb{Z}_p$ の位相的性質を完全に「射影的」に引き写した極値不連結空間になります。
   凝縮数学での重要性: p 進幾何学（Solid植物論や液体ベクトル空間の理論）において、代数的な複体を構成する際、非射影的な $\mathbb{Z}_p$ をこの $\widetilde{\mathbb{Z}_p}$ で置き換えて議論の基底とします。

4. **完備ブール代数・測度代数 (Measure Algebra) のストーン空間:**
   任意の完備ブール代数にストーンの表現定理を適用して得られる空間は、必ず極値不連結コンパクトHausdorff空間になります。特に、ルベーグ可測集合のブール代数を零集合のイデアルで割った商代数のストーン空間がこれに該当します。
   凝縮数学での重要性: 凝縮機能解析学 (Condensed Functional Analysis) において、実数体 $\mathbb{R}$ 上の凝縮ベクトル空間やバナッハ空間上のラドン測度を自然に包含する「Solid $\mathbb{R}$-modules」の文脈で、積分論や L^∞ 空間の双対性を表現するために決定的な役割を果たします。

5. **十分に大きい基数 κ に関連する巨大な空間:**
   巨大な全称集合の積空間や、離散空間の巨大な非可算和の β コンパクト化から生じる極値不連結空間です。
   凝縮数学での重要性: 凝縮集合の圏は、そのままではサイズ（基数）の問題に直面するため、ある巨大な基数 κ でカットオフした κ-condensed sets を扱います。このとき、任意のコンパクトHausdorff空間を「一斉に」被覆できるほど十分に巨大な極値不連結空間の存在が保証されている必要があり、このような巨大空間が理論の健全性を担保する技術的基盤として機能します。